Matemática Discreta y Álgebra - Curso 2020/21. DIAGONALIZACIÓN

1. Estudiar si la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 3 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 5 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 7 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

Solución: Si calculamos el polinomio característico tenemos que para calcular $|A - \lambda I|$ hay que desarrollar por adjuntos. Si vamos desarrollando por columnas, tenemos que

$$|A - \lambda I| = (1-\lambda) \cdot det \begin{pmatrix} 3-\lambda & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 5-\lambda & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 7-\lambda & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 9-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \cdot (3-\lambda) \cdot det \begin{pmatrix} 5-\lambda & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 7-\lambda & a_{45} \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \cdot (3-\lambda) \cdot (5-\lambda) \cdot det \begin{pmatrix} 7-\lambda & a_{45} \\ 0 & 9-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \cdot (3-\lambda) \cdot (5-\lambda) \cdot (7-\lambda) \cdot (9-\lambda)$$

Como hay 5 autovalores distintos, la matriz es diagonalizable.

2. Demostrar que para cualquier $A \in \mathrm{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ matriz triangular (superior o inferior) sus autovalores son los elementos de la diagonal. ¿Es A siempre diagonalizable? (AYUDA: considera la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ con todos los elementos nulos salvo $a_{12} = 1$).

Solución: Por el mismo procedimiento que en el apartado anterior, tenemos que dada una matriz A diagonal superior (desarrollamos por columnas) o inferior (desarrollamos por filas) de orden n, tenemos que si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son los elementos de la diagonal entonces $|A - \lambda I| = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$. Así los autovalores son exactamente los elementos de la diagonal.
Si todos estos elementos son distintos, entonces será diagonalizable. En otros casos dependerá. Por ejemplo, si todos son el mismo, sólo si la matriz A es diagonal será diagonalizable.

3. Demostrar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene los autovalores $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 1, y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad algebraica 2.

(i) Encontrar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $D = P^{-1} A P$.

(ii) Determinar la matriz A^{28} utilizando el apartado anterior.

Solución: Efectivamente el polinomio característico es $|A - \lambda I| = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$. Así

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y $A^{28} = QD^{28}Q^{-1} = D = \begin{pmatrix} -2^{28}+2 & 0 & -2^{29}+2 \\ 2^{28}+1 & 2^{28} & 2^{28}-1 \\ 2^{28}-1 & 0 & 2^{29}-1 \end{pmatrix}$

4. Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables y, en caso afirmativo, indicar las matrices diagonales que se pueden obtener a partir de las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución: Las matrices A y B lo son porque tienen dos autovalores distintos. La matriz D no tiene autovalores reales y la matriz C tienes dos autovalores reales iguales, y la multiplicidad geométrica no coincide con la algebraica.

5. Demostrar que $A \in \mathrm{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ es inversible si y solo si 0 NO es autovalor de A.

Solución: Tenemos que la matriz $A = QDQ^{-1}$. Entonces, si tiene inversa tenemos que $A^{-1} = QD^{-1}Q^{-1}$, donde invertir una matriz diagonal es invertir los elementos de la diagonal, por tanto para que tenga sentido, el 0 no puede aparecer. De igual manera, si tenemos la igualdad primera dicha, calculamos la inversa a partir de ahí. Como el autovalor 0 no aparece en D tiene sentido hablar de D^{-1} y por tanto existe A^{-1}.

6. Sea $A \in \mathrm{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Entonces, se pide:

   a) Calcular los autovalores de la traspuesta de A (A^t).
   b) Calcular los autovalores y autovectores de A^2, $A^3, \ldots A^k$ ($k \in \mathbb{N}$).
   c) Calcular los autovalores y autovectores de A^{-1}.
   d) Si A es diagonalizable, ¿son A^t, A^2 ó A^{-1} diagonalizables? Razona tus respuestas y en caso afirmativo calcula sus diagonalizaciones.

Solución:

   a) Los autovalores de A^t son los mismos que para A ya que $det(A^t - \lambda I) = det((A - \lambda I)^t) = det(A - \lambda I)$ ya que los determinantes de una matriz y su traspuesta son iguales.
   b) Los autovalores de una matriz A^k son $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k$ y los autovectores son los mismos que los de A
   c) Los autovalores de la matriz A^{-1} son $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_m$ y los autovectores son los mismos que los de A
   d) Si $A = QDQ^{-1}$ es diagonalizable, entonces las tres matrices son diagonalizables que serían:
   $A^t = (Q^{-1})^t DQ^t$, $A^2 = QD^2Q^{-1}$, $A^{-1} = Q^{-1}D^{-1}Q$

7. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2x2}(\mathbb{R})$. Estudiar cuándo A es diagonalizable (en función del signo de $a^2 + 4b$).

Solución: Si $a^2 + 4b \leq 0$ entonces no es diagonalizable y si $a^2 + 4b > 0$ entonces es diagonalizable.

8. Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y sólo si $b = 0$.

Solución: Tenemos que el polinomio característico es $(a - \lambda)^2$. Por tanto a es raíz doble. La multiplicada geométrica del autovalor es $mult(a)_g = 2 - rg(A - aI)$. Si $b = 0$, el rango es 0 y si $b \neq 0$ entonces el rango es 1. Por tanto si $b = 0$ la matriz es diagonalizable porque las multiplicidades coinciden.

9. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha \\ 3 & 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3x3}(\mathbb{R}).$$

¿Para qué valores de α y β es A diagonalizable? En los casos en los que A sea diagonalizable calcular P y D.

Solución: Si $\beta \neq 5, -1$ entonces es diagonalizable y las matrices asociadas son:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{\beta-5}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{-6} & 1 & \frac{-\alpha}{1-\beta} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $\beta = -1$ y $\alpha = 0$ es diagonalizable y las matrices asociadas son:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $\beta = -1$ y $\alpha \neq 0$ no es diagonalizable.
Si $\beta = 5$ no es diagonalizable.

10. Diagonaliza, si es posible, las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: La matriz A_1 no es diagonalizable porque la multiplicada algebriaca y geométrica de los autovalores no coincide. A la matriz A_4 le pasa lo mismo.
La matriz A_2 es diagonalizable y las matrices asociadas son:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A_3 es diagonalizable y las matrices asociadas son:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/4 \\ 1 & 1 & 3/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Hallar los autovalores y los autoespacios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3x3}(\mathbb{R})$$

Indicar si es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular una matriz diagonal D y una matriz de cambio de base P que cumpla $P^{-1}AP = D$.

Solución: No es diagonalizable ya que el polinomio característico no tiene todas las raíces en $\mathbb{R}$.

12. Estudiar si la siguiente matriz es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular A^n:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Solución: Es diagonalizable y las matrices asociadas son:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1/5 & -1 & 1 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4x4}(\mathbb{R}).$$

¿Es diagonalizable A? Razonar la respuesta y si es posible calcular una matriz diagonal D, indicando qué matriz de cambio de base P se utiliza.

Solución: Es diagonalizable y las matrices asociadas son:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4x4}(\mathbb{R})$$

Calcular los valores propios y vectores propios de A ¿es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$? Razonar la respuesta y, si es posible, indicar D y P.

Solución: Los autovalores son -1,1,2. El 2 es autovalor doble. Los autovectores que tenemos son el (-1,1,0,0) asociado al 1, el (-1/2,-1/2,1,0) asociado al -1 y el (0,0,0,1) asociado al 2. Como sólo tenemos uno asociado al 2, no es diagonalizable.

15. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4x4}(\mathbb{R}).$$

Calcular el polinomio característico y los valores propios (reales) de A. ¿Es A diagonalizable? Razonar la respuesta y si es posible calcular una matriz diagonal D e indicar una matriz P inversible que cumpla $P^{-1}AP = D$. Calcular A^{99} (sin realizar el producto directamente).

Solución: El polinomio característico $P(\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)$, luego los autovalores son $0, -1, 1, -2$. Sí es diagonalizable, y las matrices asociadas son:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -4/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además:

$$A^{99} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2^{98}+1 & 2^{98} \\ -2 & 1 & (-2^{100}+4)/3 & (2^{100}+2)/3 \\ 0 & 0 & -2^{98} & 2^{98} \\ 0 & 0 & 2^{98} & -2^{98} \end{pmatrix}$$

16. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4x4}(\mathbb{R}).$

¿Es diagonalizable A? Razonar la respuesta y, si es posible, calcular una matriz diagonal D y la matriz de cambio de base P que se emplea para obtener dicha matriz D.

Solución: No es diagonalizable porque los autovalores son -2 y 4 que tienen multiplicidad algebraica 2 cada uno, pero multiplicidad geométrica 1 ambos.

17. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4x4}(\mathbb{R})$.

¿Es diagonalizable A? Razona tu respuesta y, si es posible, calcula una matriz diagonal D semejante a A y la matriz de cambio de base P que estás empleando para obtener dicha matriz D.

Solución: Sí es diagonalizable porque tiene 4 autovalores distintos y las matrices asociadas son:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Calcular los valores propios de A y su multiplicidad algebraica.

(ii) ¿Es diagonalizable? Razonar la respuesta.

(iii) Calcular si es posible una matriz inversible P y una matriz diagonal D que cumplan $P^{-1}AP = D$.

(iv) Calcular la potencia A^{100}.

Solución:

(i) Los autovalores son -1 y 3 ambos con multiplicidad algebraica 2.

(ii) Sí es diagonalizable ya que las multiplidades algebraicas y geométricas coinciden en ambos autovalores.

(iii)

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$A^{100} = \begin{pmatrix} -3^{100}/4 & -1 & -1 & 3^{100} \\ -3^{100}/4 & 1 & 1 & 3^{100} \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

19. Determínese los autovalores y autovectores de los siguientes endomorfismos dados por:

- $f(x, y, z) = (2y + 2z, 2x - z, -x - y)$
- $g(x, y) = (-3x + 4y, 4x + 3y)$
- $h(x, y, z) = (x, 2x + 2y + 2z, -x + y + 3z)$

Solución:

- La matriz asociada a f es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Los autovalores asociados son 1 y -2, el primero de multiplicada algebraica 2 y el segundo de multiplicidad algebraica 1. El autovector asociado a 1 es $(0,-1,1)$ y el autovector asociado a -2 es $(-1,1,0)$.

- La matriz asociada a g es:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

  Los autovalores asociados son 5 y -5, ambos de multiplicidad algebraica 1. El autovector asociado a 5 es $(1/2,1)$ y el autovector asociado a -5 es $(-2,1)$.

- La matriz asociada a h es:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

  Los autovalores asociados son 1 y 4, el primero de multiplicada algebraica 2 y el segundo de multiplicidad algebraica 1. El autovector asociado a 1 es $(0,-2,1)$ y el autovector asociado a 4 es $(0,1,1)$.

20. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de un espacio vectorial V_3 y sea f una aplicación lineal de V_3 a V_3 dado por:

$$f(u_1) = u_1, f(u_2) = u_1 - 2u_2, Kerf = L[u_2 - u_3]$$

Se pide:

- La matriz de f respecto de la base B
- La imagen de f y su dimensión
- El polinomio característico y los autovalores de f
- Una base B' respecto de la cual la matriz de f es diagonal
- La matriz del cambio de base de B a B'

Solución: Cómo tenemos que el núcleo está generado por el vector $u_2 - u_3$ tenemos que $f(u_2 - u_3) = 0$ y como f es lineal tenemos que $f(u_2) = f(u_3)$. Así $f(u_3) = u_1 - 2u_2$.

- $$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Una base de la imagen de f sería $\{(1,0,0),(1,-2,0)\}$ y la dimensión es 2. (Cogemos las columnas de la matriz de f y vemos cuáles son linealmente independientes).
- $P(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(2+\lambda)$ y los autovalores son $0, 1$ y -2.
- Una base de autovectores sería $\{(0,-1,1),(1,0,0),(-1/3,1,0)\}$
- Tenemos que la matriz de cambio de base de B' a B sería:

$$M_{B' \to B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  y por tanto la matriz de cambio de base de B a B' sería la inversa de la anterior, es decir:

$$M_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$